Множества. Операции над множествами. Отображение множеств. Мощность множества

**Научный руководитель: Кодиров Фаррух Ергаш угли**

Ассистент кафедры информационных технологий

**Усмонов Махсуд Тулкин угли**

Студент

Ташкентский университет информационных технологий, Каршинский филиал

**АННОТАЦИЯ :** Приветствую вас на первом уроке по высшей алгебре, который появился… в канун пятилетия сайта, после того, как я уже создал более 150 статей по математике, и мои материалы начали оформляться в завершённый курс. Впрочем, буду надеяться, что не опоздал – ведь многие студенты начинают вникать в лекции только к государственным экзаменам =)

Вузовский курс вышмата традиционно зиждется на трёх китах:

– [аналитической геометрии](http://mathprofi.ru/vektory_dlya_chainikov.html);

– математическом анализе ([пределы](http://mathprofi.ru/predely_primery_reshenii.html), [производные](http://mathprofi.ru/kak_naiti_proizvodnuju.html) и т.д.)

– и, наконец, сезон 2015/16 учебного года открывается уроками Алгебра для чайников, [Элементы математической логики](http://mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html), на которых мы разберём основы раздела, а также познакомимся с базовыми математическими понятиями и распространёнными обозначениями. Надо сказать, что в других статьях я не злоупотребляю «закорючками» http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image002.gif, однако то лишь стиль, и, конечно же, их нужно узнавать в любом состоянии =). Вновь прибывшим читателям сообщаю, что мои уроки ориентированы на практику, и нижеследующий материал будет представлен именно в этом ключе. За более полной и академичной информацией, пожалуйста, обращайтесь к учебной литературе. Поехали:

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА :** Типичный пример включений мы наблюдаем при рассмотрении числовых множеств. Повторим школьный материал, который важно держать на заметке и при изучении высшей математики.

**SET. OPERATIONS ON SETS. DISPLAY OF SETS. THE POWER OF MULTIPLES**

Academic Supervisor: Kodirov Farrukh

Assistant of the Department of Information Technology

**Farruxbek0209@mail.ru**

Usmanov Makhsud Tulkin oglu

Tashkent University of Information Technologies

Karshi branch, 3rd year student

+99891 947 13 40

**maqsudusmonov22@gmail.com**

**ABSTRACT: I** welcome you to the first lesson in higher algebra, which appeared ... on the eve of the fifth anniversary of the site, after I had already created more than 150 articles in mathematics, and my materials began to form into a completed course. However, I will hope that I am not late - after all, many students begin to delve into lectures only for state exams =)

The university course in high school is traditionally based on three pillars:

- analytical geometry;

- mathematical analysis (limits, derivatives, etc.)

- and, finally, the season of the 2015/16 academic year opens with the lessons Algebra for Dummies, Elements of Mathematical Logic, on which we will analyze the basics of the section, as well as get acquainted with basic mathematical concepts and common notation. I must say that in other articles I do not abuse "squiggles", but that is only style, and, of course, they need to be recognized in any state =). To newly arrived readers, I would like to inform you that my lessons are practice-oriented, and the following material will be presented in this vein. For more complete and academic information, please refer to the educational literature. Go:

**KEY WORDS:** A typical example of inclusions we see when considering sets of numbers. Let's repeat the school material, which is important to keep in mind when studying higher mathematics.

Множество. Примеры множеств

Множество – это фундаментальное понятие не только математики, но и всего окружающего мира. Возьмите прямо сейчас в руку любой предмет. Вот вам и множество, состоящее из одного элемента.

В широком смысле, множество – это совокупность объектов (элементов), которые понимаются как единое целое (по тем или иным признакам, критериям или обстоятельствам). Причём, это не только материальные объекты, но и буквы, цифры, теоремы, мысли, эмоции и т.д.

Обычно множества обозначаются большими латинскими буквами http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image004.gif (как вариант, с подстрочными индексами: http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image006.gif и т.п.), а его элементы записываются в фигурных скобках, например:

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image008.gif – множество букв русского алфавита;  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image010.gif – множество натуральных чисел;

ну что же, пришла пора немного познакомиться:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image012.gif – множество студентов в 1-м ряду

… я рад видеть ваши серьёзные и сосредоточенные лица =)

Множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014.gif и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image016.gif являются конечными (состоящими из конечного числа элементов), а множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image018.gif – это пример бесконечного множества. Кроме того, в теории и на практике рассматривается так называемое пустое множество:

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image020.gif – множество, в котором нет ни одного элемента.

Пример вам хорошо известен – множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image016_0000.gif на экзамене частенько бывает пусто =)

Принадлежность элемента множеству записывается значком http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image023.gif, например:

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image025.gif – буква «бэ» принадлежит множеству букв русского алфавита;  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image027.gif – буква «бета» не принадлежит множеству букв русского алфавита;  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image029.gif – число 5 принадлежит множеству натуральных чисел;  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image031.gif – а вот число 5,5 – уже нет;  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image033.gif – Вольдемар не сидит в первом ряду (и тем более, не принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0000.gif или http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image018_0000.gif =)).

В абстрактной и не очень алгебре элементы множества обозначают маленькими латинскими буквами http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image037.gif и, соответственно, факт принадлежности оформляется в следующем стиле:

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image039.gif – элемент http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image041.gif принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image043.gif.

Вышеприведённые множества записаны прямым перечислением элементов, но это не единственный способ. Многие множества удобно определять с помощью некоторого признака (ов), который присущ всем его элементам. Например:

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image045.gif – множество всех натуральных чисел, меньших ста.

Запомните: длинная вертикальная палка http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image047.gif выражает словесный оборот «которые», «таких, что». Довольно часто вместо неё используется двоеточие: http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image049.gif – давайте прочитаем запись более формально: «множество элементов http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image051.gif, принадлежащих множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image018_0001.gif натуральных чисел, таких, что http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image054.gif». Молодцы!

Данное множество можно записать и прямым перечислением:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image056.gif

Ещё примеры:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image058.gif – и если и студентов в 1-м ряду достаточно много, то такая запись намного удобнее, нежели их прямое перечисление.

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image060.gif – множество чисел, принадлежащих отрезку http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image062.gif. Обратите внимание, что здесь подразумевается множество действительных чисел (о них позже), которые перечислить через запятую уже невозможно.

Следует отметить, что элементы множества не обязаны быть «однородными» или логически взаимосвязанными. Возьмите большой пакет и начните наобум складывать в него различные предметы. В этом нет никакой закономерности, но, тем не менее, речь идёт о множестве предметов. Образно говоря, множество – это и есть обособленный «пакет», в котором «волею судьбы» оказалась некоторая совокупность объектов.

Подмножества

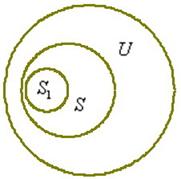
Практически всё понятно из самого названия: множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image064.gif является подмножеством множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0001.gif, если каждый элемент множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image064_0000.gif принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0002.gif. Иными словами, множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image064_0001.gif содержится во множестве http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0003.gif:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image068.gif

Значок http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image070.gif называют значком включения.

Вернёмся к примеру, в котором http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0004.gif – это множество букв русского алфавита. Обозначим через http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image064_0002.gif – множество его гласных букв. Тогда:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image068_0000.gif

Также можно выделить подмножество согласных букв и вообще – произвольное подмножество, состоящее из любого количества случайно (или неслучайно) взятых кириллических букв. В частности, любая буква кириллицы является подмножеством множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0005.gif.

Отношения между подмножествами удобно изображать с помощью условной геометрической схемы, которая называется кругами Эйлера.

Пусть http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image016_0001.gif – множество студентов в 1-м ряду, http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image074.gif – множество студентов группы, http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image076.gif – множество студентов университета. Тогда отношение включений http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image078.gif можно изобразить следующим образом:  
  
Множество студентов другого ВУЗа следует изобразить кругом, который не пересекает внешний круг; множество студентов страны – кругом, который содержит в себе оба этих круга, и т.д.

Типичный пример включений мы наблюдаем при рассмотрении числовых множеств. Повторим школьный материал, который важно держать на заметке и при изучении высшей математики:

Числовые множества

Как известно, исторически первыми появились натуральные числа, предназначенные для подсчёта материальных объектов (людей, кур, овец, монет и т.д.). Это множество уже встретилось в статье, единственное, мы сейчас чуть-чуть модифицируем его обозначение. Дело в том, что числовые множества принято обозначать жирными, стилизованными или утолщёнными буквами. Мне удобнее использовать жирный шрифт:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image082.gif

Иногда к множеству натуральных чисел относят ноль.

Если к множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image084.gif присоединить те же числа с противоположным знаком и ноль, то получится множество целых чисел:

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image086.gif, рационализаторы и лентяи записывают его элементы со значками «плюс минус»:))

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image088.gif

Совершенно понятно, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image090.gif – поскольку каждый элемент множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image084_0000.gif принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image093.gif. Таким образом, любое натуральное число можно смело назвать и целым числом.

Название множества тоже «говорящее»: целые числа – это значит, никаких дробей.

И, коль скоро, целые, то сразу же вспомним важные признаки их делимости на 2, 3, 4, 5 и 10, которые будут требоваться в практических вычислениях чуть ли не каждый день:

Целое число делится на 2 без остатка, если оно заканчивается на 0, 2, 4, 6 или 8 (т.е. любой чётной цифрой). Например, числа:  
400, -1502, -24, 66996, 818 – делятся на 2 без остатка.

И давайте тут же разберём «родственный» признак: целое число делится на 4, если число, составленное из двух его последних цифр (в порядке их следования) делится на 4.

400 – делится на 4 (т.к. 00 (ноль) делится на 4);  
-1502 – не делится на 4 (т.к. 02 (двойка) не делится на 4);  
-24, понятно, делится на 4;  
66996 – делится на 4 (т.к. 96 делится на 4);  
818 – не делится на 4 (т.к. 18  не делится на 4).

Самостоятельно проведите несложное обоснование данного факта.

С делимость на 3 чуть сложнее: целое число делится на 3 без остатка, если сумма входящих в него цифр делится на 3.

Проверим, делится ли на 3 число 27901. Для этого просуммируем его цифры:  
2 + 7 + 9 + 0 + 1 = 19 – не делится на 3  
Вывод: 27901 не делится на 3.

Просуммируем цифры числа -825432:  
8 + 2 + 5 + 4 + 3 + 2 = 24 – делится на 3  
Вывод: число -825432 делится на 3

Целое число делится на 5, если оно заканчивается пятёркой либо нулём:  
775, -2390 – делятся на 5

Целое число делится на 10, если оно заканчивается на ноль:  
798400 – делится на 10 (и, очевидно, на 100). Ну и, наверное, все помнят – для того, чтобы разделить на 10, нужно просто убрать один ноль: 79840

Также существуют признаки делимости на 6, 8, 9, 11 и т.д., но практического толку от них практически никакого =)

Следует отметить, что перечисленные признаки (казалось бы, такие простые) строго доказываются в теории чисел. Этот раздел алгебры вообще достаточно интересен, однако его теоремы… прямо современная китайская казнь =) А Вольдемару за последней партой и того хватило…, но ничего страшного, скоро мы займёмся живительными физическими упражнениями =)

Следующим числовым множеством идёт множество рациональных чисел:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image095.gif – то есть, любое рациональное число представимо в виде дроби http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image097.gif с целым числителем и натуральным знаменателем.

Очевидно, что множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image099.gif

И в самом деле – ведь любое целое число можно представить в виде рациональной дроби http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image101.gif, например: http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image103.gif и т.д. Таким образом, целое число можно совершенно законно назвать и рациональным числом.

Характерным «опознавательным» признаком рационального числа является то обстоятельство, что при делении числителя на знаменатель получается либо  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image105.gif – целое число,

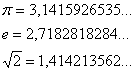
либо  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image107.gif – конечная десятичная дробь,

либо  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image109.jpg– бесконечная периодическая десятичная дробь (повтор может начаться не сразу).

Полюбуйтесь делением и постарайтесь выполнять это действие как можно реже! В организационной статье [Высшая математика для чайников](http://mathprofi.ru/matematika_dlya_chainikov.html) и на других уроках я неоднократно повторял, повторяю, и буду повторять эту мантру:

В высшей математике все действия стремимся выполнять в обыкновенных (правильных и неправильных) дробях

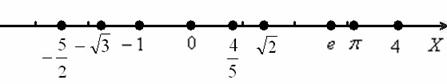
Согласитесь, что иметь дело с дробью http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image111.gif значительно удобнее, чем с десятичным числом 0,375 (не говоря уже о бесконечных дробях).

Едем дальше. Помимо рациональных существует множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image113.gif иррациональных чисел, каждое из которых представимо в виде бесконечной НЕпериодической десятичной дроби. Иными словами, в «бесконечных хвостах» иррациональных чисел нет никакой закономерности:  
 («год рождения Льва Толстого» дважды)  
и т.д.

О знаменитых константах «пи» и «е» информации предостаточно, поэтому на них я не останавливаюсь.

Объединение рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных (вещественных) чисел:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image117.gif

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image119.gif – значок объединения множеств.

Геометрическая интерпретация множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image121.gif вам хорошо знакома – это числовая прямая:  
  
Каждому действительному числу соответствует определённая точка числовой прямой, и наоборот – каждой точке числовой прямой обязательно соответствует некоторое действительное число. По существу, сейчас я сформулировал свойство непрерывности действительных чисел, которое хоть и кажется очевидным, но строго доказывается в курсе математического анализа.

Числовую прямую также обозначают бесконечным интервалом http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image125.gif, а запись http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image127.gif или эквивалентная ей запись http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image129.gif символизирует тот факт, что http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image041_0000.gif принадлежит множеству действительных чисел (или попросту  «икс» – действительное число).

С вложениями всё прозрачно: множество рациональных чисел – это подмножество множества действительных чисел:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image132.gif, таким образом, любое рациональное число можно смело назвать и действительным числом.

Множество иррациональных чисел – это тоже подмножество действительных чисел:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image134.gif

При этом подмножества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image136.gif и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image113_0000.gif не пересекаются – то есть ни одно иррациональное число невозможно представить в виде http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image097_0000.gif рациональной дроби.

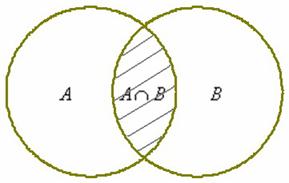
Существуют ли какие-нибудь другие числовые системы? Существуют! Это, например, [комплексные числа](http://mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html), с которыми я рекомендую ознакомиться буквально в ближайшие дни или даже часы.

Ну а пока мы переходим к изучению операций над множествами, дух которых уже материализовался в конце этого параграфа:

Действия над множествами. Диаграммы Венна

Диаграммы Венна (по аналогии с кругами Эйлера) – это схематическое изображение действий с множествами. Опять же предупреждаю, что я рассмотрю не все операции:

1) Пересечение множеств характеризуется логической связкой И и обозначается значком http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image140.gif

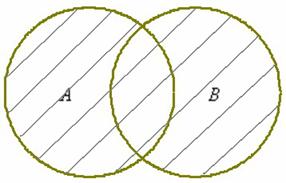
Пересечением множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0006.gif и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143.gif называется множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image145.gif, каждый элемент которого принадлежит и множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0007.gif, и множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0000.gif. Грубо говоря, пересечение – это общая часть множеств:  
  
Так, например, для множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image150.gif:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image152.gif

Если у множеств нет одинаковых элементов, то их пересечение пусто. Такой пример нам только что встретился при рассмотрении числовых множеств:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image154.gif

Множества рациональных и иррациональных чисел можно схематически изобразить двумя непересекающимися кругами.

Операция пересечения применима и для бОльшего количества множеств, в частности в Википедии есть хороший [пример пересечения множеств букв трёх алфавитов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B0_%D0%92%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0).

2) Объединение множеств характеризуется логической связкой ИЛИ и обозначается значком http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image119_0000.gif

Объединением множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0008.gif и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0001.gif называется множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image157.gif, каждый элемент которого принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0009.gif или множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0002.gif:  


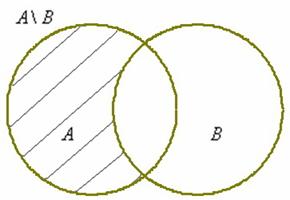
Запишем объединение множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image161.gif:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image163.gif – грубо говоря, тут нужно перечислить все элементы множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0010.gif и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0003.gif, причём одинаковые элементы (в данном случае единица на пересечении множеств) следует указать один раз.

Но множества, разумеется, могут и не пересекаться, как это имеет место быть с рациональными и иррациональными числами:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image117_0000.gif

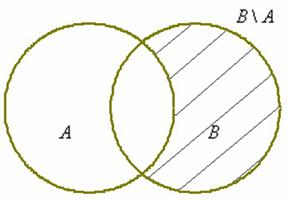
В этом случае можно изобразить два непересекающихся заштрихованных круга.

Операция объединения применима и для бОльшего количества множеств, например, если  http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image165.gif, то:

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image167.gif, при этом числа вовсе не обязательно располагать в порядке возрастания (это я сделал исключительно из эстетических соображений). Не мудрствуя лукаво, результат можно записать и так:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image169.gif

3) Разностью множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0011.gif и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0004.gif называют множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image171.gif, каждый элемент которого принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0012.gif и не принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0005.gif:  
  
Разность http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image171_0000.gif читаются следующим образом: «а без бэ». И рассуждать можно точно так же: рассмотрим множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image176.gif. Чтобы записать разность http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image171_0001.gif, нужно из множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0013.gif «выбросить» все элементы, которые есть во множестве http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0006.gif:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image180.gif

Пример с числовыми множествами:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image182.gif – здесь из множества целых чисел исключены все натуральные, да и сама запись http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image184.gif так и читается: «множество целых чисел без множества натуральных».

Зеркально: разностью множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0007.gif и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0014.gif называют множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image186.gif, каждый элемент которого принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0008.gif и не принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0015.gif:  
  
Для тех же множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image176_0000.gif  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image192.gif – из множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0009.gif «выброшено» то, что есть во множестве http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0016.gif.

А вот эта разность оказывается пуста: http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image195.gif. И в самом деле – если из множества натуральных чисел исключить целые числа, то, собственно, ничего и не останется :)

Кроме того, иногда рассматривают симметрическую разность http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image197.gif, которая объединяет оба «полумесяца»:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image199.gif – иными словами, это «всё, кроме пересечения множеств».

4) Декартовым (прямым) произведением множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0017.gif и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0010.gif называется множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image201.gif всех упорядоченных пар http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image203.gif, в которых элемент http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image205.gif, а элемент http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image207.gif

Запишем декартово произведение множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image209.gif:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image211.gif – перечисление пар удобно осуществлять по следующему алгоритму: «сначала к 1-му элементу множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0018.gif последовательно присоединяем каждый элемент множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0011.gif, затем ко 2-му элементу множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0019.gif присоединяем каждый элемент множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0012.gif, затем к 3-му элементу множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0020.gif присоединяем каждый элемент множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0013.gif»:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image216.jpg

Зеркально: декартовым произведением множеств http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0014.gif и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0021.gif называется множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image218.gif всех упорядоченных пар http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image220.gif, в которых http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image222.gif. В нашем примере:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image224.gif – здесь схема записи аналогична: сначала к «минус единице» последовательно присоединяем все элементы множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0022.gif, затем к «дэ» – те же самые элементы:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image226.jpg

Но это чисто для удобства – и в том, и в другом случае пары можно перечислить в каком угодно порядке – здесь важно записать все возможные пары.

А теперь гвоздь программы: декартово произведение http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image228.gif – это есть не что иное, как множество точек http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image230.gif нашей родной [декартовой системы координат](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image232.gif.

Задание для самостоятельного закрепления материала:

Выполнить операции http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image234.gif, если:

1) http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image236.gif;  
2) http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image238.gif

Множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image240.gif удобно расписать перечислением его элементов.

И пунктик с промежутками действительных чисел:

3) http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image500.gif

Напоминаю, что квадратная скобка означает включение числа в промежуток, а круглая – его невключение, то есть «минус единица» принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image143_0010.gif, а  «тройка» не принадлежит множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0020.gif. Постарайтесь разобраться, что представляет собой декартово произведение данных множеств. Если возникнут затруднения, выполните чертёж ;)

Краткое решение задачи в конце урока.

Отображение множеств

Отображение множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image002_0000.gif во множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image004_0000.gif– это правило, по которому каждому элементу множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image002_0001.gif ставится в соответствие элемент (или элементы) множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image004_0001.gif. В том случае если в соответствие ставится единственный элемент, то данное правило называется однозначно определённой функцией или просто функцией.

Функцию, как многие знают, чаще всего обозначают буквой http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image007.gif – она ставит в соответствие каждому элементу http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image009.gif единственное значение http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image011.gif, принадлежащее множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image004_0002.gif.

Ну а сейчас я снова побеспокою множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0023.gif студентов 1-го ряда и предложу им 6 тем для рефератов (множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image016_0002.gif):

http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image018_0002.gif [Векторы](http://mathprofi.ru/vektory_dlya_chainikov.html)  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image020_0000.gif [Матрицы](http://mathprofi.ru/deistviya_s_matricami.html)  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image022.gif [Определители](http://mathprofi.ru/kak_vychislit_opredelitel.html)  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image024.gif [Комплексные числа](http://mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html) (о, да!)  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image026.gif [Теория пределов](http://mathprofi.ru/predely_po_koshi.html)  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image028.gif [Что такое производная?](http://mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html)

Установленное (добровольно или принудительно =)) правило http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image030.gif ставит в соответствие каждому студенту http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image032.gif множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image034.gif единственную тему реферата http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image036.gif множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image016_0003.gif.

…а вы, наверное, и представить себе не могли, что сыграете роль аргумента функции =) =)

Элементы множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image034_0000.gif образуют область определения функции (обозначается через http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image039_0000.gif), а элементы множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image016_0004.gif – область значений функции (обозначается через http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image041_0001.gif).

Построенное отображение множеств имеет очень важную характеристику: оно является взаимно-однозначным или биективным (биекцией). В данном примере это означает, что каждому студенту поставлена в соответствие одна уникальная тема реферата, и обратно – за каждой темой реферата закреплён один и только один студент.

Однако не следует думать, что всякое отображение биективно. Если на 1-й ряд (к множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image034_0001.gif) добавить 7-го студента, то взаимно-однозначное соответствие пропадёт – либо один из студентов останется без темы (отображения не будет вообще), либо какая-то тема достанется сразу двум студентам. Обратная ситуация: если к множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image016_0005.gif добавить седьмую тему, то взаимнооднозначность отображения тоже будет утрачена –  одна из тем останется невостребованной.

Уважаемые студенты на 1-м ряду, не расстраивайтесь – остальные 20 человек после пар пойдут прибирать территорию университета от осенней листвы. Завхоз выдаст двадцать голиков, после чего будет установлено взаимно-однозначное соответствие между основной частью группы и мётлами…, а Вольдемар ещё и в магазин сбегать успеет =)

Теперь разберёмся со «школьной» функцией одной переменной. Пожалуйста, загляните на страницу [Функции и графики](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) (отроется на соседней вкладке), и в Примере 1 найдите график линейной функции http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image043_0000.gif.

Задумаемся, что это такое? Это правило http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image030_0000.gif, которое каждому элементу http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image046.gif области определения (в данном случае это все значения «икс») ставит в соответствие единственное значение http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image048.gif.

С теоретико-множественной точки зрения, здесь происходит отображение множества действительных чисел во множество действительных чисел:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image050.gif

Первое множество мы по-обывательски называем «иксами» (независимая переменная или аргумент), а второе – «игреками» (зависимая переменная или функцияhttp://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image052.gif).

Далее взглянем на старую знакомую [параболу](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image054_0000.gif . Здесь правило http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image056_0000.gif каждому значению «икс» ставит в соответствие его квадрат, и имеет место отображение:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image059.gif

Итак, что же такое функция одной переменной? Функция одной переменной  – это правило http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image030_0001.gif, которое каждому значению независимой переменной http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image046_0001.gif из области определения ставит в соответствие одно и только одно значение http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image052_0000.gif.

Как уже отмечалось в примере со студентами, не всякая функция является взаимно-однозначной. Так, например, у функции http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image064_0003.gif каждому «иксу» области определения  соответствует свой уникальный «игрек», и наоборот – по любому значению «игрек» мы сможем однозначно восстановить «икс». Таким образом, это биективная функция.

! На всякий случай ликвидирую возможное недопонимание: моя постоянная оговорка об области определения не случайна! Функция может быть определена далеко не при всех «икс», и, кроме того, может быть взаимно-однозначной и в этом случае. Типичный пример: http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image066.gif

А вот у квадратичной функции не наблюдается ничего подобного, во-первых:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image068_0001.gif – то есть, различные значения «икс» отобразились в одно и то же значение «игрек»; и во-вторых: если кто-то вычислил значение функции и сообщил нам, что http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image070_0000.gif, то не понятно – этот «игрек» получен при http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image072.gif или при http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image074_0000.gif? Что и говорить, взаимной однозначностью здесь даже не пахнет.

Задание 2: просмотреть [графики основных элементарных функций](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) и выписать на листок биективные функции. Список для сверки в конце этого урока.

Мощность множества

Интуиция подсказывает, что термин характеризует размер множества, а именно количество его элементов. И интуиция нас не обманывает!

Мощность пустого множества равна нулю.

Мощность множества http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image014_0024.gif равна шести.

Мощность множества букв русского алфавита http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image076_0000.gif равна тридцати трём.

И вообще – мощность любого конечного множества равно количеству элементов данного множества.

…возможно, не все до конца понимают, что такое конечное множество – если начать пересчитывать элементы этого множества, то рано или поздно счёт завершится. Что называется, и китайцы когда-нибудь закончатся.

Само собой, множества можно сравнивать по мощности и их равенство в этом смысле называется равномощностью. Равномощность определяется следующим образом:

Два множества являются равномощными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image034_0002.gif студентов равномощно множеству http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image016_0006.gif тем рефератов, множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image002_0002.gif букв русского алфавита равномощно любому множеству из 33 элементов и т.д. Заметьте, что именно любому множеству из 33 элементов – в данном случае имеет значение лишь их количество.

Буквы русского алфавита можно сопоставить не только с множеством номеров  
1, 2, 3, …, 32, 33, но и вообще со стадом в 33 коровы.

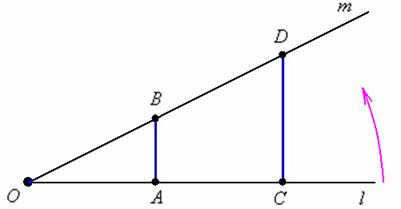
Гораздо более интересно обстоят дела с бесконечными множествами. Бесконечности тоже бывают разными! ...зелёными и красными Самые «маленькие» бесконечные множества – это счётные множества. Если совсем просто, элементы такого множества можно пронумеровать. Эталонный пример – это множество натуральных чисел http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image080.gif. Да – оно бесконечно, однако у каждого его элемента в ПРИНЦИПЕ есть номер.

Примеров очень много. В частности, счётным является множество всех чётных натуральных чисел http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image082_0000.gif. Как это доказать? Нужно установить его взаимно-однозначное соответствие с множеством натуральных чисел или попросту пронумеровывать элементы:  
Чётных натуральных чисел столько же, сколько и натуральных!  
Взаимно-однозначное соответствие установлено, следовательно, множества равномощны и множество http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image086_0000.gif счётно. Парадоксально, но с точки зрения мощности – чётных натуральных чисел столько же, сколько и натуральных!

Множество целых чисел тоже счётно. Его элементы можно занумеровать, например, так:  
Взаимно-однозначное соответствие между множеством целых и натуральных чисел

Более того, счётно и множество рациональных чисел http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image090_0000.gif. Поскольку числитель – это целое число (а их, как только что показано, можно пронумеровать), а знаменатель – натуральное число, то рано или поздно мы «доберёмся» до любой рациональной дроби http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image092.gif и присвоим ей номер.

А вот множество действительных чисел http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image094.gif уже несчётно, т.е. его элементы пронумеровать невозможно. Данный факт хоть и очевиден, однако строго доказывается в теории множеств. Мощность множества действительных чисел также называют континуумом, и по сравнению со счётными множествами это «более бесконечное» множество.

Поскольку между множеством http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image094_0001.gif и числовой прямой существует взаимно-однозначное соответствие (см. выше), то множество точек числовой прямой тоже несчётно. И более того, что на километровом, что на миллиметровом отрезке – точек столько же! Классический пример:  
  
Поворачивая луч http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image098.gif против часовой стрелки до его совмещения с лучом http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image100.gif мы установим взаимно-однозначное соответствие между точками синих отрезков. Таким образом, на отрезке http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image102.gif столько же точек, сколько и на отрезке и http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image104.gif!

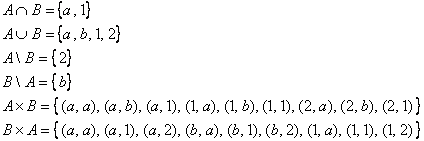
Данный парадокс, видимо, связан с загадкой бесконечности… но мы сейчас не будем забивать голову проблемами мироздания, ибо на очереди [основы математической логики](http://mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html), а не философия =)

Спасибо за внимание и успехов вам в учёбе!

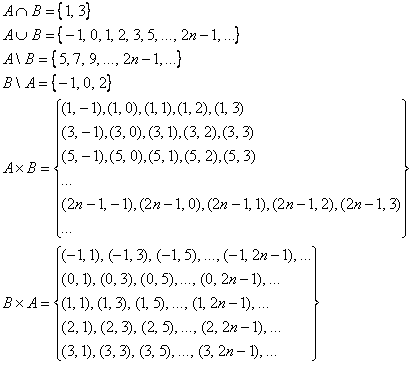
Решение заданий:

Задание 1

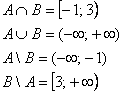
1) http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image106.gif



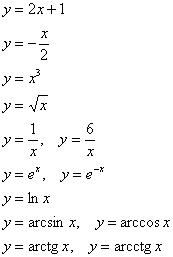
2) http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image110.gif  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image002_0003.gif – это множество нечётных натуральных чисел: http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image113_0001.gif



3) http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image501.gif

  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image503.gif – все точки http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image230.gif координатной плоскости http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image232.gif , удовлетворяющие двум указанным неравенствам. Аналогично:  
http://mathprofi.ru/b/mnozhestva_clip_image504.gif

Задание 2 Взаимно-однозначные функции на иллюстрациях урока [Функции и графики](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html):



**ЛИТЕРАТУРА**

* Киселёв, Андрей Петрович // [Большая советская энциклопедия](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%82%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%8D%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D0%B4%D0%B8%D1%8F#%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%82%D1%8C%D0%B5_%D0%B8%D0%B7%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5) : [в 30 т.] / гл. ред. [А. М. Прохоров](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%85%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80_%D0%9C%D0%B8%D1%85%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87). — 3-е изд. — М. : Советская энциклопедия, 1969—1978.
* Андронов И. К., А. П. Киселев. [Некролог], «Математика в школе», 1941, № 2
* Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселев, «Математика в школе», 1948, № 4
* Депман И. Я., История арифметики, М., 1959.
* Моргулис А. Я., Тростников В. Законодатель школьной математики // Наука и жизнь. 1968. № 1
* Пыльнев-Рогачёв, Лунёва М. И. Служитель «царицы-наук» // Кольцовский сквер. 2002. № 3
* http://mathprofi.ru/perehod\_k\_novomu\_bazisu.html
* <http://mathprofi.ru/delenie_otrezka_v_dannom_otnoshenii.html>
* <http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html>
* <http://mathprofi.ru/metody_eilera_i_runge_kutty.html>
* <http://mathprofi.ru/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii.html>
* <http://mathprofi.ru/matematicheskaya_statistika.html>
* <http://mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html>
* http://mathprofi.ru/vektory\_dlya\_chainikov.html